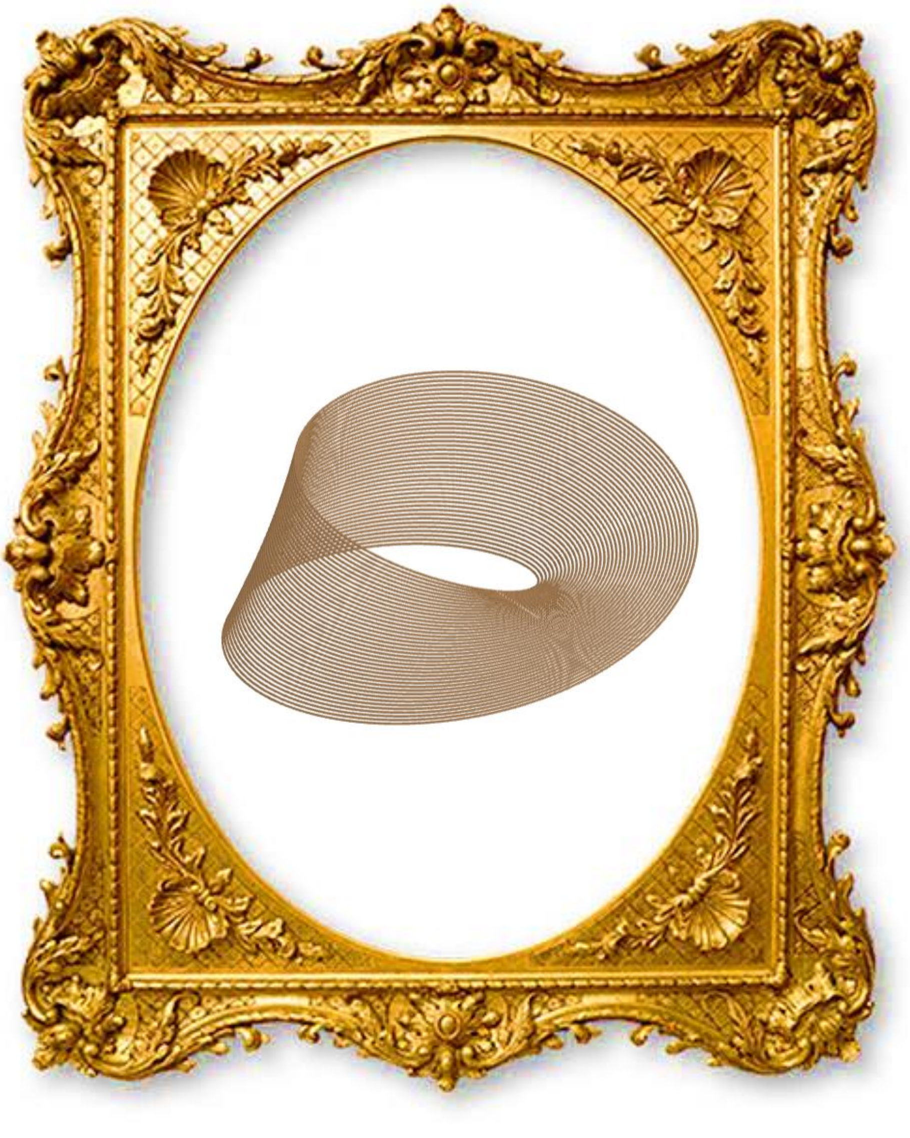
２０２３年度

会誌第８号

早稲田実業学校

数学研究同好会



部員募集中！

特に中学生の部員を募集しています。
男子部員が多いですが、女子部員もいます。
男女問わず、気軽に見学に来てください！

【活動内容】

普段は先輩が後輩に中高数学、あるいは大学数学を教えたり、問題を一緒に解いたり、雑談で盛り上がったりしていることが多いです。

毎年、１月に行われる**数学オリンピック**(高校生向け)、**ジュニア数学オリンピック**(中学生向け)に参加しています。文化祭後は、数オリに向けて問題をみんなで解くことが多いです。ときどき OB の先輩も来てくださり、数オリの対策講義をしてくださったり、大学での勉強について教えてくださったりします。予選を突破し、本選へ行く部員も毎年数名いますよ！

今年は夏休みに**合宿**を行いました。愛知県・岐阜県へ行き、２日目、３日目には名古屋大学、名城大学で先生の講義を受けました。観光の時間もたくさんあり、みんなとても楽しんでいました！

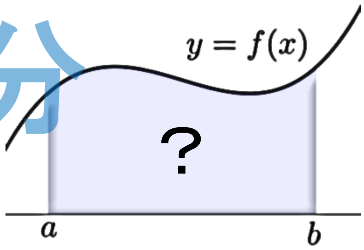
【活動日・活動場所】

毎週火・水・木・土、中１A 組(1 号館１階)で活動。

数学を楽しもう！

どんなグラフの面積も計算できる方法とは？

積分



完全数（“perfect number”）って何？

$$6, 28, 496, 8128, \cdots$$

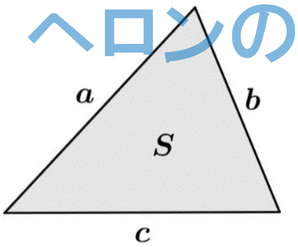
物体の運動を正確に予測できる方程式とは？

$0.9999\cdots=1$

$$m\ddot{r} = F$$

３辺の長さから三角形の面積を計算！

ヘロンの公式



２乗したらマイナスになる数

$$i^2 = -1$$

２乗したら０になる０以外の数

$$\varepsilon^2 = 0$$

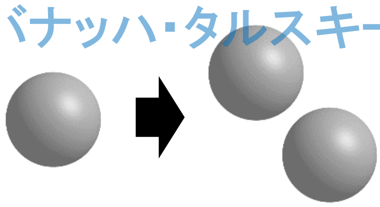
席替えで、同じ席になる人
がいる確率は？

最も美しいと言われる数式
「オイラーの等式」

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

球を分割して組み直したら、
元の球と同じ体積の球が２つできる!?

バナッハ･タルスキーの定理



「素数は無限に存在」
証明できる？

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$$

バーゼル問題

自然数の “個数” と
偶数の “個数” は等しい!?

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

はじめに

こんにちは。数学研究同好会、通称「すうけん」です。

すうけんでは、みんなで面白そうな問題を解いたり、作問をしたり、工作をして数学の実験をしたりなど、授業では味わえない数学の魅力を感じて毎日活動しています！雑談やボードゲームをすることもあり、とても自由な部活です。

さて、今年の文化祭は４年ぶりの一般公開ということで、部員もとても楽しみにしてきました。今回の展示はコンセプトにこだわり、美術館らしい「美しい数学」を集めてみたのですが、いかがでしたでしょうか？楽しんでいただけたら幸いです。

この部誌では、部員たちが各々興味のあるテーマの面白さなどを紹介します。今理解できなかったとしても数年後に見直してみてください。自身の成長を感じられるかもしれませんよ！

数研　部長より

目次

数学の用語・記号について

部誌をより楽しむために必要最低限の知識をまとめました。

［自然数］　$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

［整数］　$\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

［有理数］　二つの整数の比（分数）で表される数（分母は 0 でない整数）。

［無理数］　二つの整数の比で表すことができない数。

［実数］　有理数と無理数を総称して実数と呼ぶ。数直線上に表せる数。

［正（せい）の実数］　0 より大きい実数。

［負（ふ）の実数］　0 より小さい実数。

［絶対値］　ある実数xと 0 との数直線上の距離をxの絶対値といい、$|x|$で表す。

例　$|2| = 2$、$|-2| = 2$

［定数］　文字aが定数であるとは、aの値は変化しないものとして考えるということ。

［変数］　文字xが変数であるとは、xの値は変化するものとして考えるということ。

変数がとりうる値を不等号で表すことがある。

例　$-1 \leq x \leq 1$　→変数xは−1 以上 1 以下の範囲で変化する。

［関数］　ある 2 つの変数x, yがあり、xの値が 1 つ決まれば、必ずyの値もそれに応じて 1 つに決まるという関係があるとする。このとき、yはxの関数であるという。

例　円の半径が 1 つ決まればその円周も 1 つに決まる。

したがって、円周は半径の関数である。

［指数］　a^bをaのb乗といい、bを指数という。bが自然数のときは、a^bはaをb回掛け算した値である。

例：（3 の 4 乗）$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$、指数は 4

［～乗根］　$a^n = b$であるとき、aをbのn乗根という。例：9 の 2 乗根は 3 と−3

［任意の～に対して］　全ての～に対して、どの～に対しても、

第1章

2023 年度　合宿体験記

高等部２年　＊＊＊＊＊＊

　今年の夏も合宿に行ってきたので概要を紹介します！　今回は名古屋大学、名城大学の３名の先生方の講義を特別に受けさせてもらいました。講義の内容も後半で紹介しているのでぜひご覧ください。

日程：8/21～8/23（2 泊 3 日）
場所：愛知、岐阜
参加者：[中等部 1 年] 4 名、[2 年] 2 名、[高等部 1 年] 2 名、[2 年] 6 名、[3 年] 2 名
引率：[顧問] 3 名、[OB・OG] 9 名
計 28 名

◆１日目

熱田神宮 → 名古屋城 → 班別行動

　１日目は名古屋観光を楽しみました。班別行動では、班ごとに自由行動を行い、それぞれ「オアシス 21」、「名古屋港水族館」、「リニア・鉄道館」などをまわりました。

◆２日目

数学ワンダーランド・高木貞二博士記念室を見学

　数学者高木貞二(1875～1960)の故郷である岐阜県本巣市を訪れ、富有柿センターの数学ワンダーランド(１階)と高木貞二博士記念室(２階)を見学しました。見学の前に、館長から高木貞二博士についてご紹介していただきました。

高木貞二

東京帝国大学名誉教授。類体論（代数的整数論の一分野）や解析学で多くの功績を残した。
著書「解析概論」が有名。

数学ワンダーランドは東京理科大学の「数学体験館」の監修を受けた施設です。見たり触れたりして数学を楽しめる展示がたくさんあり、皆で遊べるゲームやパズルなども楽しめました。

高木貞二博士記念室では博士の生い立ちや恩師とのエピソード、功績などが紹介されていました。幼少期から才能を開花させていたそうで、特に遺品のノートの字の美しさに驚きました。

名古屋大学　訪問

・名古屋大学 大学院多元数理科学研究科 教授/研究科長
森吉 仁志 先生 講演　→p. 6〜講演内容の紹介

・名古屋大学 大学院多元数理科学研究科 准教授
喜多 奈々緒 先生 講演　→p. 8〜講演内容の紹介

◆３日目

名城大学　訪問

・名城大学 理工学研究科 教授

　小沢 哲也 先生 講演　→p. 10～講演内容の紹介

トヨタ産業技術記念館を見学（愛知県名古屋市）

　トヨタ産業技術記念館は、トヨタグループが運営する博物館です。「繊維機械館」と「自動車館」からなるとても大きな博物館で、どの展示も迫力がありました。

◆合宿まとめ

　今年も大学の先生方の興味深い講義が聞けて充実した合宿でした。特に中学生にとっては難しすぎたかもしれませんが、最先端で研究をされている方々と交流できたことはとても良い刺激になったと思います。また、数学ワンダーランドをはじめ、多くの施設を訪れて様々な学びがありました。

　引率してくださった先生方、協力してくださった名古屋の皆様、ありがとうございました！

◆講演　概要

①名古屋大学　森吉先生講演より

ベクトル場の幾何学的性質（ポアンカレの指数公式）

・ベクトル場

空間上の各点に 1 つのベクトル（矢印）が対応しているとき、その空間を「**ベクトル場**」といいます。風向と風速を表した天気図のようなものを想像するとわかりやすいと思います。矢印の向きが風向、長さが風速を表していると考えてください。（図 1-1～1-4 はベクトル場の例。）

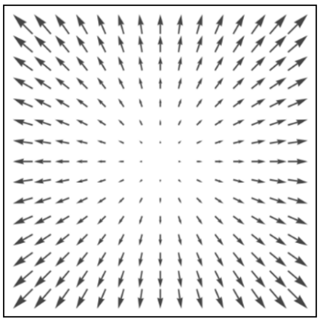


図 1-1

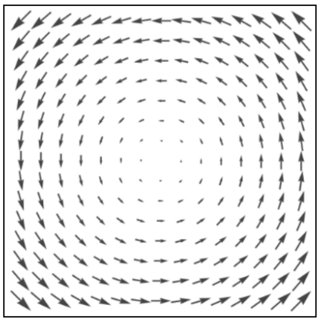


図 1-2

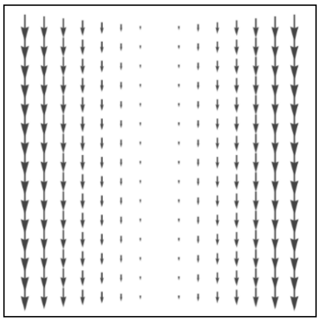


図 1-3

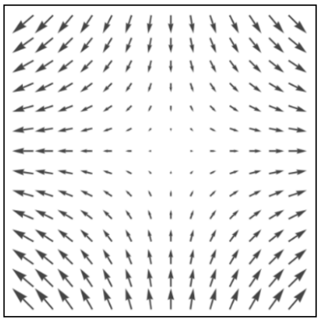


図 1-4

・積分曲線

ベクトル場の中のある点を出発点として、ベクトルの向きに従ってなぞっていくと、1 つの曲線ができるはずです。このような曲線を「**積分曲線**」と言います。異なる点を出発点とすれば図のように複数の積分曲線が描けます。

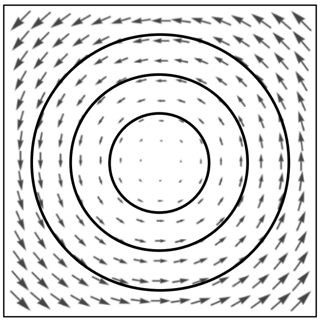


図 2. 図 1-2 の積分曲線の例

・特異点と**指数**

ベクトル場の中に、大きさが 0 のベクトル(ただの点のようなもの)があるとしましょう。この点をベクトル場の「**特異点**」や「零点」と言います。

次に、特異点の周りに小さな円を描き、この円周上を点が一周することを考えます。点が動くとともに、その点の上のベクトルも変化します。このベクトルの変化に注目しましょう。点が円周上を一周する間に、ベクトルが何回転したかをその特異点での「**指数**」と言います。図 1-1 の特異点の指数は 1 です(図 3)。

問　円の半径の大きさによって指数は変わるでしょうか？

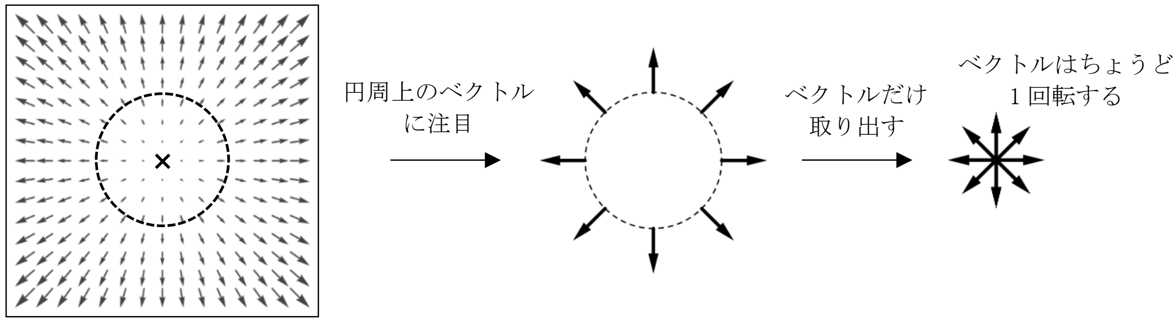


図 3. 図 1-1 の特異点(図の✕印)。指数は 1。

・ポアンカレの指数公式

ベクトル場の中に円を 1 つ描きます。(円の中には特異点がいくつ含まれていても構いません。)そして、円に積分曲線が内接する回数、外接する回数を数えます。例えば、図 4 のような場合、内接する回数は 2 回、外接する回数も 2 回です。これらについて、一般に下の公式が成り立ちます。

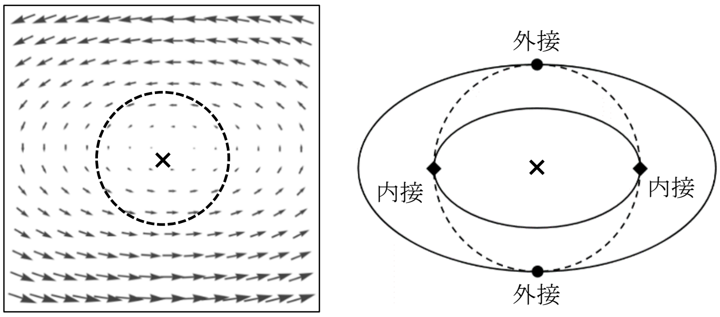


図 4. ベクトル場(左)とその積分曲線(実線)及び円(点線)との接点(右)

ポアンカレの指数公式

(円内のすべての特異点の指数の総和) $= \dfrac{i-e}{2} + 1$

i：円に積分曲線が内接する回数

e：円に積分曲線が外接する回数

※証明は難解なため省略。
ぜひ、いろいろなベクトル場を描いてみて、等式が成り立つことを確かめてみてください！

アンリ・ポアンカレは「ポアンカレ予想」で有名な数学者です。位相幾何学などで多くの功績を残しており、この指数公式も位相幾何学を用いて 3 次元、4 次元などの高次元の定理に一般化されます。興味のある方はぜひ調べてみてください。

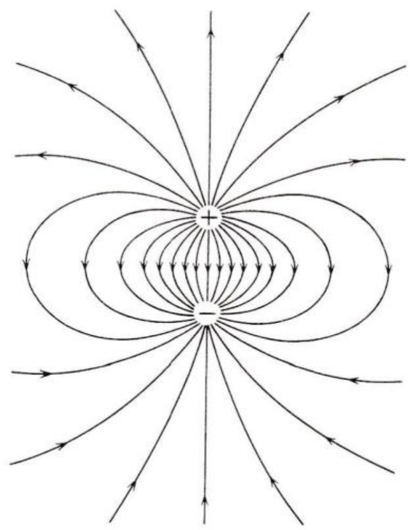


図 5. 特異点を 2 つ持つ例
(積分曲線を表示、⊕⊖の点が特異点)
長岡洋介著「電磁気学Ｉ」より

②名古屋大学　喜多先生講演より
グラフ理論とホールの結婚定理

・グラフ

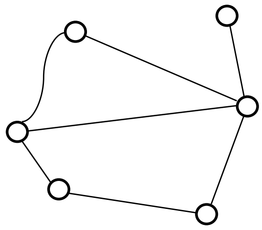


図 6.　グラフの例

　いくつかの点とそれらを結ぶ線からなる図形を**グラフ**といいます。また、グラフを構成する点を頂点、線を辺といいます。辺は直線でも曲線でも構いません。大事なのは「どの頂点とどの頂点を結んでいるか」ということだけです。

　※よく知られる、棒グラフや折れ線グラフ、関数を図示したグラフなどとは異なります。

　人と人とのネットワークを表した図や路線図などがグラフの例です。グラフの性質を研究するグラフ理論は特にそういったネットワークなどの情報学の基礎として利用されますが、他に比べて必要な前提知識が少なく、パズル的な要素も多い楽しい分野です。

・ホールの結婚定理

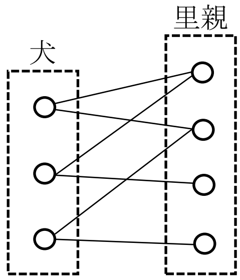


図 7.　犬と里親の候補

問題

図 7 のように、里親探し中の犬と里親の候補、相性のいい犬−里親のペアが与えられている。（相性のいいペアは辺で結ばれている。）
犬 1 匹に対し里親は 1 人に限るとき、すべての犬が相性のいい里親に出会えるか。

この問題はグラフ理論の用語で次のように言い換えられます。

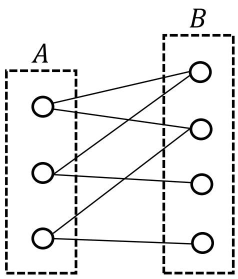


図 8.　二部グラフ

問題

頂点集合 A の頂点をすべてカバーするマッチングは存在するか(図 8)。

↓解説

　図 8 のグラフは頂点集合 A と B に分割され、それぞれの中で辺は結ばれていません。（頂点集合 A の中の 2 頂点が辺で結ばれていることはない、ということ。）　これは犬と里親の問題の意図から当然ともいえます。このように 2 つの頂点集合に分類できるグラフを「二部グラフ」といいます。

　マッチングとは、端点がかぶらないようにいくつかの辺を選んできたときの辺の集まりのことです。そして、頂点集合 A のすべての頂点が、マッチングに属するどれかの辺の端点になっているとき、頂点集合 A の頂点がすべてカバーされている、と表現します。

解答例

例えば図 9 のようなマッチングが見つかります。

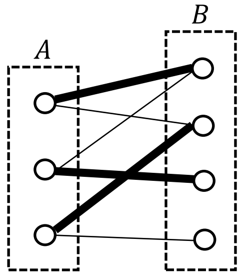


図 9. 二部グラフ

そして、犬と里親の数が一般の場合については次の定理が成り立ちます。

ホールの結婚定理

以下の 2 つは同値である。

①A の頂点をすべてカバーするマッチングが存在する

②A の任意の部分集合 X に対して、$|X| \leq |Neigh(X)|$

ただし、$Neigh(X)$ は X と辺でつながっている頂点の集合です。近傍集合ともいいます。

$Neigh$ は近傍(neighborhood)の頭文字。

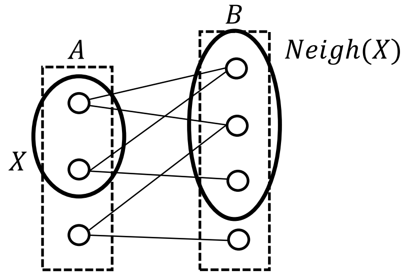


図 10. $Neigh(X)$の例

$|X|$ は X の要素数。図 10 の場合、$|X| = 2$、$|Neigh(X)| = 3$ で②の不等式をみたしています。この不等式が、どのように X を選んでも成り立つというのが②の主張です。

①と②が「同値」であるとは、①が成り立つときは②も成り立ち、また、②が成り立つときは①も成り立つ、ということです。それぞれ、記号で①⇒②、②⇒①と表し、同値であることを①⇔②と表します。①⇒②はよく考えると当たり前のように感じるかもしれません。難しいのは②⇒①を示すことです。

※紙面の都合で証明は載せられませんが、調べてみると様々な解説が見つかるのでぜひ調べてみてください。

・マッチング理論であつかうマッチングの種類

マッチングにもいくつか種類があります。上で紹介した問題は、A のすべての頂点を完全にカバーするマッチング(A から B への**完全**マッチング)を探す問題でしたが、もちろんそのようなマッチングが存在しないこともあります。しかし、完全マッチングは存在しなくとも、なるべく多くの頂点がカバーされるマッチングを探すことはできます。(今回の場合、なるべく多くの犬が相性のいい里親に出会えるようにする、ということ。)このような問題を、**最大**マッチングを探す問題といいます。

完全マッチング、最大マッチング以外にもいろいろなマッチングがあるので気になる方はぜひ調べてみてください。

③名城大学 小沢先生講演より

数学の問題を解くコツ

ちなみに、世界で毎年２万～3 万の
新定理が発表されているそう

・成果発表への流れと数学者に求められること

<u>成果発表への流れ</u>

①新定理を発見（証明が必須）

②論文を作成（定理発見から１年以上はかかる）

③投稿する専門誌を選び、その委員会に提出

（審査員による査読、著者との議論が行われる）

④受理→出版　or　不採択→修正し基本別の専門誌へ

<u>数学者に求められること</u>

・好奇心があり、多くの疑問を持てること

・浮かんだ疑問を自力で解決したいと思えること

・飽きずに、長く考えられること

（人より多く時間がかかってしまってもいい。）

・問題の解き方（ジョージ・ポリア著「いかにして問題を解くか」より）

①類似の問題を解いたことがあるか（そこで使った方法が今回も使えないか）

②問題の一般化、特殊化

③例を探す（特殊な場合について考えてヒントを探す）

④補助的問題の設定

⑤問題を分割（スタートからゴールまでをいくつかに分割し、１つずつ解いていく）

⑥解くのに使った方法が他の問題にも使えるか？（新しい問題の解決）

　講演の中でいくつか問題を用意していただきました。以下は、そのときに実際にみんなで解いた問題です。①～⑥を実践して挑戦してみてください！

問１

（１）2 つの円の位置関係と、共通接線の本数に法則はあるか。

（２）（１）を拡張した問題を考えよ。→人それぞれの工夫が表れる。

問２　球面上の三角形の内角の和は 180°か。

問３

（１）三角形の内接円の半径を r_0、傍接円の半径を r_1、r_2、r_3 とすると

$$\frac{1}{r_0}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$

　が成り立つことを示せ。(ルーリエの定理)

（２）（１）を拡張した問題を考えよ。

問４

（１）４つの面の面積が等しい四面体はどのくらい存在するか。（“どのくらい”をどう解釈するか）

（２）（１）を拡張した問題を考えよ。

問５

（１）黄金比を傾きに持つ直線$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$と、直線$x=m$、$y=n$（m、nは整数）の交点について考える。以下、$x=m$を縦線、$y=n$を横線と呼ぶ。直線$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$を原点からの正の方向になぞっていったときに、縦線、横線との交点が順に横、縦、横、横、縦…と現れる。この順番に規則性はあるか。

（２）ほかの無理数を傾きにもつ直線について考えよ。

問６

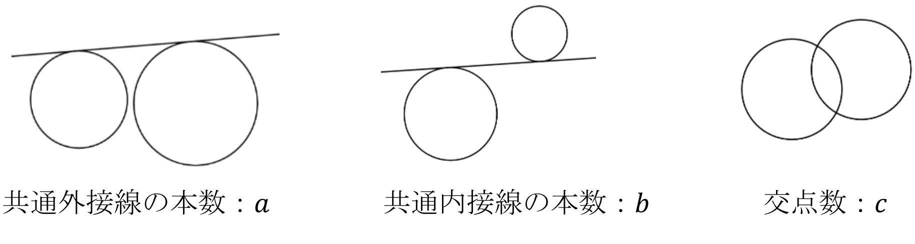
（１）２つの集合$\{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor \mid n$は正の整数$\}$と$\{\lfloor n(2+\sqrt{2})\rfloor \mid n$は正の整数$\}$の関係を考察せよ。

ただし、$\lfloor\quad\rfloor$はガウス記号である。（小数部分を切り捨てる関数だと思ってください。）

（２）ほかの無理数（$\sqrt{3}$やπなど）について、どのような２つの集合を作れば（１）のような関係ができるか考察せよ。

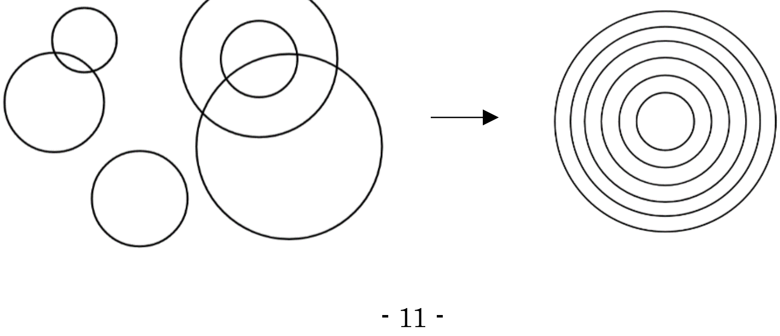
解答例or**ヒント**（こちらも紙面の都合で、すべての解答を書くことはできません。ご了承ください。）

問１　（１）高校数学でも少し習う話題ですが、実は面白い等式が成り立ちます。

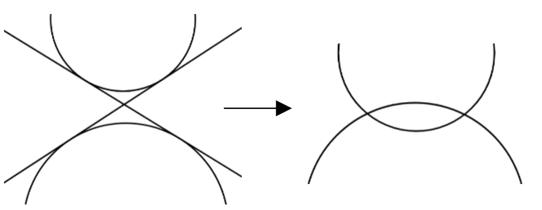


$$\boxed{a-b-c=0}$$

［証明の指針］　図のように任意の円の集まりがあったとき、操作①と②を繰り返すことで、必ず同心円状に並べることができます。

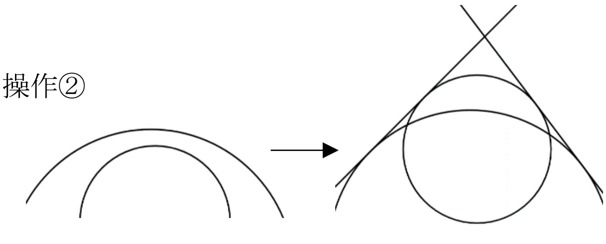


操作①



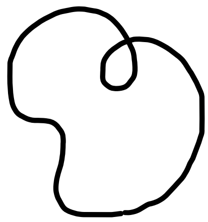
(a, b, c)　$(a, b-2, c+2)$

操作②



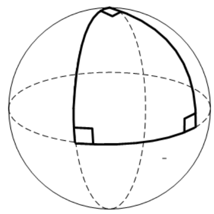
(a, b, c)　$(a+2, b, c+2)$

①、②のいずれを行っても、$a-b-c$ の値は保たれます。はじめの状態と最後の同心円の状態で、$a-b-c$ の値は等しいということです。最後の状態では $a=b=c=0$ より $a-b-c=0$ であるため、はじめの状態でも $a-b-c=0$ が成り立ちます。（終）



（２）右図のような一般の曲線（閉曲線）では同じ式が成り立つでしょうか。

実は、abc のほかにもう一つ変数を加えないといけません。ちなみに、この話題は小沢先生の専門分野であり、先生の著書「曲線―幾何学の小径」に記述があるそうです。



問２　右図参考。（球面三角形の角度 – 物理のかぎしっぽ　より）

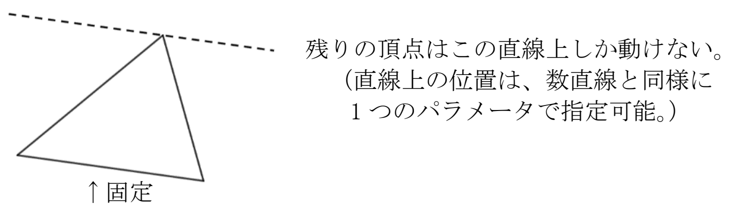
参考：球面上の三角形の面積と内角の和 ｜ 高校数学の美しい物語

https://manabitimes.jp/math/946

問３　（１）内接円の半径と三辺の長さを使って三角形の面積を表すことができるはずです。傍接円の半径を使っても同じことができるでしょうか。

（２）三角形ではなく、四面体の内接球、傍接球でも同じ公式が成り立つか、円が内接する四角形や五角形でも同じ公式が成り立つかなど、いろいろ考えられます。（四面体の場合は、傍接球をどう定義するかがまた問題になります。）

問４　（１）“どのくらい”を、変形のパラメータの個数（次元）で答えるという方法があります。例えば、１辺を固定した三角形の等積変形のパラメータの数は１つです。



問５　（１）フィボナッチ数列に関係します。

問６　（１）いくつか書きだすと、$\lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ に現れない数が $\lfloor n(2+\sqrt{2}) \rfloor$ に現れることに気づくはず。

（２）$\sqrt{2}$ の場合、相方は $2+\sqrt{2}$ でした。$\sqrt{3}$ の場合、相方には何を足せばいいでしょうか？

第2章

人の誕生日を効率的に祝いたい

高等部 2 年　＊＊＊＊＊＊

1. 動機

　はじまりは、数研会長のこんなひとこと。

「誕生日の平均って、いつなんだろうね。誰か出してよ」

　そんなこんなで出来たのがこの記事です。特に今回は、「2024 年、誕生日を祝っておけば一番得な休日」を求めてみます。

2. 調査方法

　今回は、日本人または生活拠点が日本である人物を対象として、「2024 年、その日を含む前後 4 日間が誕生日である人が最も多い土日祝日」を求めます(誕生日に一番近い土日祝日にお祝いするとして、お祝いされる人が最も多い日、ということです)。

　しかし、全ての日本人の誕生日を集計するのは現実的ではありません。そこで今回の調査対象を、サイト「タレントデータバンク[1]」掲載者の中で誕生日が判明している 19024 人に絞りました。2023 年 2 月 1 日の日本の総人口 124,631,000 人[2]におけるカバー率、約 0.02%。一高校生の研究はこれくらいが限界です。やってみましょう。

3. 調査結果

　2024 年の土曜日・日曜日・国民の祝日[3]とそれによる振替休日を全て合わせると 118 日。その中で前後 4 日ずつの人数が多かったのは、

1 位	1 月 8 日	415 人(約 2.18%)	日本の人口で換算すると 2,716,956 人
2 位	1 月 7 日	413 人(約 2.17%)	日本の人口で換算すると 2,704,493 人
(〃)	9 月 23 日	413 人(約 2.17%)	日本の人口で換算すると 2,704,493 人
(〃)	12 月 15 日	413 人(約 2.17%)	日本の人口で換算すると 2,704,493 人
5 位	1 月 6 日	411 人(約 2.16%)	日本の人口で換算すると 2,692,030 人

　日本全体の人口と比較してみると、そこまで大きいとも思えないかもしれませんが、365 日均等にいると単純計算した場合、とある日の前後 4 日間に誕生日が来る人数は 2380452 人(約 1.91%)。例えば 1 月 8 日に祝うと、平均的な日より約 4 万人をお得にお祝い出来ます。非常に効率が良い。

4. まとめ

　ここまでいかに効率よく人の誕生日を祝うかを調べてきました。しかし、誕生日は 1 年で 1 回しか来ない、とても大事な日です。皆さんは 1 人 1 人の誕生日を丁寧に祝いましょう。

表１ 各日の誕生日の人数

凡例 青→土曜日 赤→日曜日、国民の祝日、振替休日

日付	人数
1 月 1 日	66
1 月 2 日	41
1 月 3 日	54
1 月 4 日	58
1 月 5 日	65
1 月 6 日	54
1 月 7 日	63
1 月 8 日	59
1 月 9 日	58
1 月 10 日	56
1 月 11 日	60
1 月 12 日	55
1 月 13 日	48
1 月 14 日	61
1 月 15 日	46
1 月 16 日	48
1 月 17 日	70
1 月 18 日	58
1 月 19 日	56
1 月 20 日	52
1 月 21 日	51
1 月 22 日	43
1 月 23 日	66
1 月 24 日	46
1 月 25 日	61
1 月 26 日	56
1 月 27 日	42
1 月 28 日	57
1 月 29 日	58
1 月 30 日	58
1 月 31 日	47
2 月 1 日	67
2 月 2 日	65
2 月 3 日	44
2 月 4 日	48

日付	人数
2 月 5 日	78
2 月 6 日	49
2 月 7 日	51
2 月 8 日	50
2 月 9 日	56
2 月 10 日	69
2 月 11 日	59
2 月 12 日	57
2 月 13 日	45
2 月 14 日	68
2 月 15 日	54
2 月 16 日	50
2 月 17 日	53
2 月 18 日	50
2 月 19 日	55
2 月 20 日	48
2 月 21 日	43
2 月 22 日	46
2 月 23 日	59
2 月 24 日	41
2 月 25 日	54
2 月 26 日	45
2 月 27 日	66
2 月 28 日	56
2 月 29 日	15
3 月 1 日	56
3 月 2 日	68
3 月 3 日	44
3 月 4 日	38
3 月 5 日	45
3 月 6 日	52
3 月 7 日	44
3 月 8 日	56
3 月 9 日	42
3 月 10 日	73

日付	人数
3 月 11 日	50
3 月 12 日	73
3 月 13 日	53
3 月 14 日	52
3 月 15 日	66
3 月 16 日	57
3 月 17 日	44
3 月 18 日	49
3 月 19 日	49
3 月 20 日	44
3 月 21 日	47
3 月 22 日	39
3 月 23 日	49
3 月 24 日	58
3 月 25 日	63
3 月 26 日	35
3 月 27 日	54
3 月 28 日	46
3 月 29 日	54
3 月 30 日	52
3 月 31 日	45
4 月 1 日	45
4 月 2 日	65
4 月 3 日	61
4 月 4 日	40
4 月 5 日	63
4 月 6 日	54
4 月 7 日	28
4 月 8 日	49
4 月 9 日	41
4 月 10 日	49
4 月 11 日	41
4 月 12 日	46
4 月 13 日	52
4 月 14 日	50

日付	人数
4 月 15 日	63
4 月 16 日	49
4 月 17 日	41
4 月 18 日	44
4 月 19 日	50
4 月 20 日	42
4 月 21 日	46
4 月 22 日	45
4 月 23 日	46
4 月 24 日	42
4 月 25 日	52
4 月 26 日	47
4 月 27 日	38
4 月 28 日	54
4 月 29 日	34
4 月 30 日	49
5 月 1 日	56
5 月 2 日	44
5 月 3 日	33
5 月 4 日	43
5 月 5 日	37
5 月 6 日	53
5 月 7 日	48
5 月 8 日	53
5 月 9 日	49
5 月 10 日	51
5 月 11 日	33
5 月 12 日	50
5 月 13 日	42
5 月 14 日	43
5 月 15 日	47
5 月 16 日	48
5 月 17 日	43
5 月 18 日	38
5 月 19 日	41

日付	人数
5 月 20 日	45
5 月 21 日	57
5 月 22 日	49
5 月 23 日	51
5 月 24 日	45
5 月 25 日	47
5 月 26 日	50
5 月 27 日	60
5 月 28 日	43
5 月 29 日	45
5 月 30 日	40
5 月 31 日	58
6 月 1 日	54
6 月 2 日	47
6 月 3 日	38
6 月 4 日	47
6 月 5 日	54
6 月 6 日	48
6 月 7 日	42
6 月 8 日	47
6 月 9 日	46
6 月 10 日	48
6 月 11 日	49
6 月 12 日	42
6 月 13 日	49
6 月 14 日	45
6 月 15 日	52
6 月 16 日	46
6 月 17 日	47
6 月 18 日	50
6 月 19 日	59
6 月 20 日	57
6 月 21 日	50
6 月 22 日	45
6 月 23 日	50

日付	人数
6 月 24 日	43
6 月 25 日	44
6 月 26 日	49
6 月 27 日	48
6 月 28 日	36
6 月 29 日	53
6 月 30 日	31
7 月 1 日	35
7 月 2 日	53
7 月 3 日	57
7 月 4 日	47
7 月 5 日	54
7 月 6 日	48
7 月 7 日	49
7 月 8 日	50
7 月 9 日	47
7 月 10 日	59
7 月 11 日	65
7 月 12 日	54
7 月 13 日	48
7 月 14 日	44
7 月 15 日	49
7 月 16 日	61
7 月 17 日	60
7 月 18 日	59
7 月 19 日	53
7 月 20 日	55
7 月 21 日	52
7 月 22 日	49
7 月 23 日	49
7 月 24 日	42
7 月 25 日	61
7 月 26 日	47
7 月 27 日	59
7 月 28 日	55

日付	人数
7 月 29 日	50
7 月 30 日	52
7 月 31 日	56
8 月 1 日	54
8 月 2 日	63
8 月 3 日	49
8 月 4 日	61
8 月 5 日	44
8 月 6 日	43
8 月 7 日	64
8 月 8 日	62
8 月 9 日	50
8 月 10 日	61
8 月 11 日	57
8 月 12 日	48
8 月 13 日	54
8 月 14 日	47
8 月 15 日	52
8 月 16 日	50
8 月 17 日	63
8 月 18 日	62
8 月 19 日	50
8 月 20 日	48
8 月 21 日	61
8 月 22 日	57
8 月 23 日	51
8 月 24 日	42
8 月 25 日	60
8 月 26 日	48
8 月 27 日	50
8 月 28 日	68
8 月 29 日	49
8 月 30 日	52
8 月 31 日	57
9 月 1 日	49

日付	人数
9 月 2 日	51
9 月 3 日	57
9 月 4 日	49
9 月 5 日	51
9 月 6 日	53
9 月 7 日	50
9 月 8 日	72
9 月 9 日	60
9 月 10 日	45
9 月 11 日	63
9 月 12 日	54
9 月 13 日	50
9 月 14 日	52
9 月 15 日	46
9 月 16 日	51
9 月 17 日	58
9 月 18 日	61
9 月 19 日	54
9 月 20 日	58
9 月 21 日	60
9 月 22 日	64
9 月 23 日	50
9 月 24 日	56
9 月 25 日	58
9 月 26 日	67
9 月 27 日	51
9 月 28 日	59
9 月 29 日	52
9 月 30 日	53
10 月 1 日	61
10 月 2 日	51
10 月 3 日	47
10 月 4 日	45
10 月 5 日	53
10 月 6 日	52

日付	人数
10 月 7 日	50
10 月 8 日	68
10 月 9 日	67
10 月 10 日	51
10 月 11 日	57
10 月 12 日	64
10 月 13 日	58
10 月 14 日	43
10 月 15 日	54
10 月 16 日	40
10 月 17 日	61
10 月 18 日	64
10 月 19 日	65
10 月 20 日	56
10 月 21 日	43
10 月 22 日	48
10 月 23 日	58
10 月 24 日	53
10 月 25 日	55
10 月 26 日	53
10 月 27 日	48
10 月 28 日	66
10 月 29 日	51
10 月 30 日	39
10 月 31 日	50
11 月 1 日	63
11 月 2 日	56
11 月 3 日	45
11 月 4 日	45
11 月 5 日	48
11 月 6 日	51
11 月 7 日	61
11 月 8 日	51
11 月 9 日	60
11 月 10 日	53

日付	人数
11 月 11 日	53
11 月 12 日	49
11 月 13 日	50
11 月 14 日	58
11 月 15 日	51
11 月 16 日	56
11 月 17 日	42
11 月 18 日	47
11 月 19 日	48
11 月 20 日	74
11 月 21 日	61
11 月 22 日	48
11 月 23 日	45
11 月 24 日	44
11 月 25 日	37
11 月 26 日	56
11 月 27 日	50
11 月 28 日	55
11 月 29 日	48
11 月 30 日	51
12 月 1 日	54
12 月 2 日	56
12 月 3 日	60
12 月 4 日	51
12 月 5 日	59
12 月 6 日	49
12 月 7 日	57
12 月 8 日	71
12 月 9 日	45
12 月 10 日	66
12 月 11 日	47
12 月 12 日	75
12 月 13 日	61
12 月 14 日	49
12 月 15 日	58

日付	人数
12 月 16 日	61
12 月 17 日	56
12 月 18 日	53
12 月 19 日	55
12 月 20 日	66
12 月 21 日	53
12 月 22 日	53
12 月 23 日	52
12 月 24 日	63
12 月 25 日	61
12 月 26 日	67
12 月 27 日	50
12 月 28 日	51
12 月 29 日	39
12 月 30 日	44
12 月 31 日	30

【おまけ】

各月の合計人数

月	人数	割合
1 月	1713	9.0%
2 月	1541	8.1%
3 月	1597	8.4%
4 月	1426	7.5%
5 月	1442	7.6%
6 月	1416	7.4%
7 月	1619	8.5%
8 月	1677	8.8%
9 月	1654	8.7%
10 月	1671	8.8%
11 月	1556	8.2%
12 月	1712	9.0%

[1]タレントデータバンク　閲覧日 2023 年 8 月 31 日
https://www.talent-databank.co.jp/
[2]人口推計 2023 年（令和 5 年） 7 月報-厚生労働省
閲覧日 2023 年 8 月 9 日
https://www.stat.go.jp/data/jinsui/pdf/202307.pdf
[3]国民の祝日について-内閣府ホームページ
閲覧日 2023 年 8 月 31 日
https://www8.cao.go.jp/chosei/shukujitsu/gaiyou.html

第3章

コンピューターと 2 進数

中等部 3 年　＊＊＊＊＊＊

はじめに

ある日，私(筆者)はこう思いました。

「私たちは普段 10 進数を使っているのに，コンピューターは，なぜ 10 進数ではなく，わざわざ 2 進数を使って計算などの処理をするのか?」

コンピューターは 2 進数を使って計算などの処理をします。ただ，普段使っている 10 進数で処理をしてもいいのではないかと私は考えたのです。そこで，この章ではコンピューターと 2 進数について書いていきます。

10 進数･2 進数とは

普段，私たちは 10 進数を使っています。10 進数とは，0 から 9 までの 10 種類の数字を使って表される数のことです。また，9 の次の自然数を表す 1 桁の数字はないので，9→10 のように桁上がりするのです。

また，2 進数とは，0 と 1 を使って表される数のことです。また，1 の次の自然数を表す 1 桁の数字はないので，1→10(「イチゼロ」と読みます)のように桁上がりするのです。

10 進数･2 進数の変換

まず，2 進数を 10 進数に変換する方法を説明します。この場合は，変換したい 2 進数の各位に，一番右にある位から2^0，2^1，2^2･･･というように順番に 2 の累乗を掛けていき，掛けたものを足し合わせます。ここで$(10110)_2$を 10 進数に変換すると，次のようになります。

$$\mathbf{0} \times 2^0 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^4 = (22)_{10}$$

($(n)_2$は，「2 進数のn」という意味です。$(n)_{10}$は，「10 進数のn」という意味です。)

次は，10 進数を 2 進数に変換する方法です。この場合は，与えられた数を 2 で割っていき，商(整数)と余りを右側に書きます。そして，その下に，先ほどの割り算での商を 2 で割ったときの商と余りを書きます。この行程を，商が 0 になるまで操り返し，縦に並んでいる余りを下にあるものから順番に書いていきます。例えば$(22)_{10}$を 2 進数に変換する場合は，次のようにします。

22	÷2=	11	余り	**0**
11	÷2=	5	余り	**1**
5	÷2=	2	余り	**1**
2	÷2=	1	余り	**0**
1	÷2=	0	余り	**1**

これにより，余り(太字･下線で示されている部分)が縦に並んでいるので，下にあるものから順番に書くと，$(10110)_2$となります。

2 進数の計算方法

ここでは，四則演算の方法を説明します。2 進数の桁上がりの数字に注意すれば，10 進数の場合と計算方法は変わりません。

足し算の例　$(1111)_2 + (101)_2$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

引き算の例　$(1111)_2 - (101)_2$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
- & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

掛け算の例　$(1110)_2 \times (101)_2$

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & \times & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

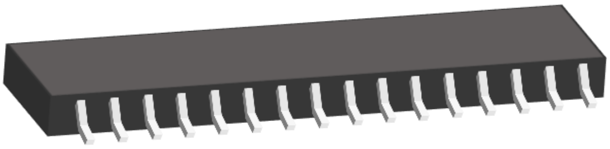
割り算の例　$(1110)_2 \div (101)_2$

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & & & 1 & 1 \\
\cline{4-7}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 1 & \\
\cline{4-7}
 & & & & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & 1 & 0 & 1 \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0
\end{array}
$$

このように，2 進数と 10 進数では，計算の方法に大きな違いはありません。同様に，平方根を求めるときなども同様で，2 進数と 10 進数で大きな違いはありません。

コンピューターはなぜ 2 進数を使うのか

コンピューターは，IC(集積回路)と呼ばれる電子部品から作られています。計算を行う CPU や，情報を記憶するメモリーの実体も IC なのです。IC は，黒いボディーに何本もの銀色のピンがついたもので，個々のピンに電気で情報が与えられることでコンピューターが作動します。



IC のイメージ図

ただ，この IC は，1 つのピンで 0 ボルトと 5 ボルト(他の電圧を使うものもありますが，ここではこれらの 2 つの電圧を用いて説明します)の 2 種類の電気しか取り扱えないのです。なぜ 2 種類の電気しか取り扱えないのかというと，大量生産をするために，工具的な取り扱いが複雑になるのを避けるためです。言い換えると，コンピューターが 2 進数を使う電気は 2 種類で済むのに対し，10 進数を使うことになると 10 種類の電気を使うことになり，2 種類の電気を使うものを作るほうが楽なのです。このため，IC に「0」という情報を与えるときは 0 ボルトの，「1」という情報を与えるときは 5 ボルトの電気が流れるのです。これが，コンピューターが 2 進数を使う理由なのです。

コンピューターは足し算しかできない

コンピューターが 2 進数を使う理由を知った皆さんには，コンピューターについてもう一つ覚えてほしいことがあります。それは，**コンピューターは足し算しかできない**ことです。つまり，コンピューターは引き算，掛け算，割り算ができないので，2 進数の計算方法でご紹介した四則演算のうち，コンピューターができるのは足し算だけで，ほかの演算は別の方法で行うことになります(後ほど詳しく説明します)。コンピューターはなぜ 2 進数を使うのかでも書かれている通り，IC は工具的な取り扱いが複雑になるのを避けて作られているため，足し算しかできないものとなっています。

では，コンピューターはどのようにして引き算，掛け算，割り算を行うのか説明します。ここから先は，すべての数を 2 進数として扱います。

まずは引き算です。前述したように，コンピューターは足し算しかできません。そこで，**補数**というものを使って引き算を行います。補数とは，**「その数字に足したときに，桁上がりが起きる最も小さい数」**です。例えば，1 の補数は 1 で($\mathbf{1+1=10}$)，1011 の補数は 101($\mathbf{1011+101=10000}$)です。コンピューターが引き算をする際は，数を引くのではなく，その「引く数」の「補数」を足し，「引く数」と「引く数」の補数を足したものを無視することで計算できます。ここで，コンピューターで$\mathbf{101-11}$を計算するとします。このとき，101 から 11 を引くのではなく，101 に 11 の補数を足し，一番大きい桁を除くと計算することができます。11 の補数は 1 です。ここで，101 に 1 を足すと 110 になり，11 と 11 の補数を足すと 100 なので，110 から 100 を無視すると 10 になります。

IC では簡単に補数を作れます。補数は，各桁を反転し，最後に 1 を足すことで作れます。

ここで，100101 の補数を作ります。100101 の各桁を反転すると 011010 になり，1 を足すと 011011 になります。この作業だけで，補数を作ることができるのです。

次に，掛け算について考えます。2 進数の計算方法でご紹介した掛け算の方法は，筆算で示されていました。ここで，$\mathbf{1110\times101}$を筆算で求めると，次のようになります。

$$
\begin{array}{ccccccc l}
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & \times & & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \rightarrow① \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \rightarrow② \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \rightarrow③ \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

左の筆算において，①には$\mathbf{1110\times1}$の計算結果が，②には$\mathbf{1110\times0}$の計算結果が 1 つ左にずれたものが，③は$\mathbf{1110\times1}$の計算結果が左に 2 つずれたものが書かれています。よって，掛け算では掛ける数(ここでは 101)の，1 があるところに掛けられる数(ここでは 1110)を置き，最後に置かれたものをすべて足し合わせればいいことになります。

最後は割り算です。ここでも掛け算の時と同様に，筆算をして考えてみます。

$$\begin{array}{rrr|rrrr} & & & & & 1 & 1 \\ \cline{4-7} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 & \\ \cline{4-7} & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ \cline{4-7} & & & & & & 0 \end{array}$$

最初は，割る数(ここでは 101)が 3 桁なので割られる数(ここでは1111)の上位3桁から割る数を引けるかどうか判断します。この場合は引けるので，商の部分に 1 を立て，割られる数の上位 3 桁から割る数を引きます。そして，先ほどの引き算で出した余りの隣に 1 桁分の数字をおろし，割る数で引けるか判断します。この場合も引けるので，商の部分に 1 を立て，先ほどと同じように引き算をします。ここで余りが 0 になったので，割り算は終了となります。

よって，割り算は「割られる数から割る数を引けるか判断し，引けるところで商の部分に 1 を立て，余りを計算し，右に 1 桁ずらす作業」を余りが 0 になるまで繰り返すことで行うことができます。

最後に

ここまで読んでいただきありがとうございました。私たちは基本的に 10 進数で数を数えますが，この章では普段使われない 2 進数と, その 2 進数を使ったコンピューターの計算を取り上げました。最後に**問題**を作りましたので，ぜひ解いてみてください。

[1]	$1+1$	[111]	1×1	[1101]	$1000+(101-11)\times 11$
[10]	$10+11$	[1000]	10×11	[1110]	$11110\div(1111-11\times 11)$
[11]	$11111+11111$	[1001]	-1011×1101	[1111]	$10101-1010\times 1101\div 101$
[100]	$1-1$	[1010]	$1\div 1$	[10000]	$\dfrac{101!}{1000}-\sqrt{110!}$
[101]	$1001-10$	[1011]	$1001\div 11$	[10001]	${}_{111}P_{11}-{}_{101}C_{10}$
[110]	$1011-10100$	[1100]	$111111\div 10101$	[10010]	下の方程式について， xを求めなさい。 $(x-1)(11x+101)=1000x-10$

(すべての問題で 2 進数を扱います。問題 110, 1001, 1111~10010 は中学校で学習する内容を利用する必要があります。答えは p. 46 をご参照ください。)

参考文献(カッコ内は閲覧日，リンクに書かれている数と閲覧日はすべて 10 進数です)

https://xtech.nikkei.com/atcl/learning/lecture/19/00007/00001/?P=2 (2023/9/18)
https://xtech.nikkei.com/atcl/learning/lecture/19/00007/00001/?P=3 (2023/9/18)
https://xtech.nikkei.com/atcl/learning/lecture/19/00007/00001/?P=4 (2023/9/23)

https://prau-ict.com/digitalize/convert-binary-to-decimal/#toc2 (2023/9/25)
https://prau-ict.com/digitalize/convert-decimal-to-binary/ (2023/9/25)
http://prester.org/gms/?page_id=3550 (2023/9/26)
https://kazusfhino.com/2022/05/05/subtraction_binarynumber/ (2023/9/26)
https://yttm-work.jp/computer_basics/computer_basics_0006.html (2023/9/26)
https://edn.itmedia.co.jp/edn/articles/1307/16/news002.html (2023/9/28)
https://edn.itmedia.co.jp/edn/articles/1307/16/news002_2.html (2023/9/28)

第4章

論理哲学論考を読む

高等部２年　＊＊＊＊＊＊

凡例・語義

～A：A でない　　A・B：A かつ B　　A＋B：A または B　A⇒B：A ならば B

命題：真か偽かで判断できる文章のこと。例えば「日本の首都は東京である」という命題は真であり、「日本で最も高い山は高尾山である」という命題は偽である。

ド・モルガンの定理：～（A＋B）＝（～A・～B)、(～A＋～B）＝～（A・B)

要素：集合を構成するもの。例えば、自然数全体の集合の要素は１、２、３…

ヴィトゲンシュタインはオーストリアの哲学者で、言語と哲学を結びつけ、後の哲学に大きな影響を与えました。彼は大学で工学や論理学を学び、第一次世界大戦に志願兵として参戦。戦場と捕虜収容所で「論理哲学論考」を書き上げます。

論理哲学論考は七つの章に分けられた短い文の集合で構成されていますが、ここでは論理学に触れている四章から六章を主に見て行きます。正直私はほかの部分の方が好きなのですが、ここは数研の部誌なので。

前提知識として、一章から六章までの概要をここに書いておきます。

・この世界で起こっている事実は、像と対応しているよ！
  ・像っていうのは思考とか命題のことだよ！
    ・例えば、机の上に鉛筆があるとする。この時、この事実は机の上の鉛筆をイメージすることや、「机の上に鉛筆がある」という文章と対応しているよ！
・言語の限界は人間の思考の限界だよ！
  ・つまり、「りんごの斜めはアゲハ蝶だ」「トマト跋扈するの上枕」「はしゅぷぽあじ」のような文章は意味が無いから、人間にはイメージできないよ。逆にイメージできない文章は意味がないよ！

さて、ようやくヴィトゲンシュタインの論理哲学論考を読んでいきます。紙面の都合上かなり飛ばしながら読みますが、お許しください。

四・二一　最も単純な命題、すなわち要素命題は、ある一つの事態の成立を主張する。

四・二一一　要素命題のひとつの特徴は、いかなる要素命題も他の要素命題と両立不可能ではない、ということにある。

（中略）

四・二二一　命題を分析していけば、最終的に、名が直接結合してできた要素命題に達しなけ

ればならない。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(p183)

要素命題とは命題の最も単純なものであるとあります。例えば、「巨人と阪神が野球をしている」という文章を例にとってみましょう。これは最も単純な命題ではありません。この命題は「巨人は野球をしている」かつ「阪神は野球をしている」かつ「巨人が野球をしている相手は阪神である」と分解できるからです。逆に言うと、「巨人は試合をしている」はこれ以上分解出来ません。つまり、最も単純な形の命題であると言えます。

要素命題とは他の要素命題と両立可能とあります。しかし、そんな命題があるかは議論の余地があります。例えば、「このリンゴは赤い」というシンプルな命題ですら「このリンゴは青い」という命題を排除します。実際後にヴィトゲンシュタインは要素命題の概念を撤回しています。もし要素命題を見つけたら割と大発見なので探してみてください。あとこの「命題をより単純な命題に分割する」という考え方は数学の問題を解くのに便利なので使ってみるといいと思います。

四・三一　真理可能性は次の図表で表すことができる。

A
真
偽

A	B
真	真
真	偽
偽	真
偽	偽

A	B	A・B
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

上の表は、命題AとBが真か偽かの一覧表です。

これだけでは意味がないのですが、右の表のように命題AとBの関係を表せます。例えば、Aを「太郎は肉まんを食べた」Bを「太郎はアンまんを食べた」という命題だとしたときA・Bは「太郎は肉まんとアンまんを食べた」と表せます。これは、AとBが両方とも真でない限り真ではありません。この表（真理表と呼ぶ）を使うことでその関係を分かりやすく視覚化できます。これも数学の問題で役に立つかもしれません。

ヴィトゲンシュタインは、五・三一で一つの操作を繰り返すだけで要素命題から命題を作り出すことができると語ります。（五・三一は前提知識が必要な上に専門用語が多くなるので省略します）つまり、(A・～B) ＋Ｃ→Ｄのような複雑な命題すらも、一つの記号から生み出すことができるのです。ここで｜という記号を導入します。A｜Bは「AでないかつBでない」を意味します。ここでは｜のみを使ってA・Bを表します。

(A｜A)　｜　(B｜B)

＝～（A・B）｜～（A・B）
＝（A・B）・(A・B)
＝A・B

証明は省略しますが、(A｜B) ｜ (A｜B) ＝A＋B ですし、他にもこの記号のみで A→B や A＝B を表せます。

さて、少し説明が具体的過ぎてしまいました。他にもトートロジーと矛盾、ラッセルのパラドックスについて興味深い主張を残していますが、紙面の都合上ラッセルのパラドックスについて軽く紹介して、論理哲学論考の総括に入ります。

まず、自分自身を要素として持たない集合全ての集合を R とします。R が R の要素であると仮定したとき、R の定義より、矛盾。R が R の要素でないと仮定したとき、R の定義より R は R の要素となるのでやはり矛盾します。この問題の解決方法については様々な方法がありますが、本題とは関係ない上に難しくて私も分からないので割愛します。

さて以上のようにヴィトゲンシュタインはこの世界はシンプルな命題のみで表せると考えました。さらに、言語で作れる命題の限界が、思考と世界の限界であると考えました。つまり、「善は美だ」「神は存在する」のような文章は想像できない以上、意味を持たない命題であり、形而上学の問題はほとんど意味がないのです。さらに、哲学の役目を「どの命題が意味を持つかを定め、科学とそうでないものの境界線を引くことである」と主張しました。論理哲学論考はその思想を示す次の文で締めくくられています。

　七　語りえぬものに関しては沈黙しなければならない。

参考文献　古田徹也　2015　ヴィトゲンシュタイン論理哲学論考　KADOKAWA　359p
本文中の引用は全て　古田徹也　2015　ヴィトゲンシュタイン論理哲学論考　KADOKAWA　359p　による

第5章

LTE の補題について

高等部３年　＊＊＊＊＊＊

前提知識

・素数pと正の整数nについて, $v_p(n)$はnを素因数分解したときのpの指数とする.

・数学Ⅰ+A までの学習指導要領

1. LTE の補題

（1）pが奇素数のとき,正の整数a,b,nと奇素数pについて,

a,bがpで割り切れず, かつ$a-b$がpで割り切れるとき, 以下の等式が成り立つ.

$$v_p(a^n-b^n)=v_p(a-b)+v_p(n)$$

（2）$p=2$ のとき

（i）正の奇数a,bと正の奇数nについて, 以下の等式が成り立つ.

$$v_2(a^n-b^n)=v_2(a-b)$$

（ii）正の奇数a,bと正の偶数nについて, 以下の等式が成り立つ.

$$v_2(a^n-b^n)=v_2(a^2-b^2)+v_2(n)-1$$

2. 証明

LTE の補題の証明をしていこう.

補題 3. 1

正の整数a,b,nと素数pについて,

a,b,nがpで割り切れず, かつ$a-b$がpで割り切れるとき, 以下の等式が成り立つ.

$$v_p(a^n-b^n)=v_p(a-b)$$

補題 3. 1 の証明

条件より, aは非負整数kを用いて以下のように表すことができる.

$$a=kp+b$$

これをa^n-b^nに代入すると

$$\begin{aligned}
&a^n-b^n\\
&=(kp+b)^n-b^n\\
&=(kp)^n+n(kp)^{n-1}b+\cdots\cdots+\tfrac{n(n-1)}{2}(kp)^2b^{n-2}+nkpb^{n-1}\\
&=kp\{(kp)^{p-1}+n(kp)^{n-2}b+\cdots\cdots+\tfrac{n(n-1)}{2}(kp)b^{n-2}+nb^{n-1}\}\\
&=(a-b)\{(kp)^{p-1}+n(kp)^{n-2}b+\cdots\cdots+\tfrac{n(n-1)}{2}(kp)b^{n-2}+nb^{n-1}\}
\end{aligned}$$

$(kp)^{p-1}+n(kp)^{n-2}b+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)}{2}(kp)b^{n-2}+nb^{n-1}$は, pと互いに素であることか

ら, $v_2(a^n-b^n)$は$v_2(a-b)$と等しい. よって補題 3. 1 は示された. (補題 3. 1 の証明終)

補題 3. 2

正の整数a,bと奇素数pについて,

a,bがpで割り切れず, かつ$a-b$がpで割り切れるとき, 以下の等式が成り立つ.

$$v_p(a^p-b^p)=v_p(a-b)+1$$

補題 3. 2 の証明

まず, 素数pと$1\ \leq k\leq p-1$を満たす正の整数kについて, ${}_p\mathrm{C}_k$がpの倍数になることを示す.

${}_p\mathrm{C}_k=\frac{p!}{(p-k)!k!}$, ${}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}=\frac{(p-1)!}{(p-k)!(k-1)!}$より以下の式が導ける.

$$k\ {}_p\mathrm{C}_k=p\ {}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

ここで, pとkは互いに素であるため, ${}_p\mathrm{C}_k$はpの倍数であることが分かる.

補題 3. 1 と同様にaは非負整数kを用いて$a\ =kp+b$と表せることから以下のことが分かる.

a^p-b^p

$=(kp+b)^p-b^p$

$=(kp)^p+p(kp)^{p-1}b+\cdots\cdots+\frac{p(p-1)}{2}(kp)^2b^{p-2}+p(kp)b^{p-1}$

$=p(a-b)\{k^{p-1}p^{p-2}+(kp)^{p-2}b+\cdots\cdots+\frac{p-1}{2}(kp)b^{p-2}+b^{p-1}\}$

上の式において, $k^{p-1}p^{p-2}+(kp)^{p-2}b+\cdots\cdots+\frac{p-1}{2}(kp)b^{p-2}+b^{p-1}$は$p$の倍数でないため, a^p-b^pがpで割り切れる回数は, $v_p(a-b)$+$v_p(p)$となり, これは$v_p(a-b)+1$と等しいことから補題 3. 2 は示された. (補題 3. 2 の証明終)

LTE の補題の証明

(1) 奇素数pと正の整数a,b,nについて, a,bがpで割り切れず, かつ$a-b$がpで割り切れるものとする. このとき, nはpと互いに素な正の整数sと非負整数tを用いて以下のように表せる.

$$n=sp^t$$

補題 3. 1 より, 以下のことが示せる.

$v_p(a^n-b^n)$

$=v_p\left(a^{sp^t}-b^{sp^t}\right)$

$=v_p\{\left(a^{p^t}\right)^s-\left(b^{p^t}\right)^s\}$

$=v_p\left(a^{p^t}-b^{p^t}\right)$

補題 3. 2 を用いることで以下のように式を変形することができる.

$v_p\left(a^{p^t}-b^{p^t}\right)$

$=v_p\{\left(a^{p^{t-1}}\right)^p-\left(b^{p^{t-1}}\right)^p\}$

$=v_p\left(a^{p^{t-1}}-b^{p^{t-1}}\right)+1$

$= v_p\left(a^{p^{t-2}} - b^{p^{t-2}}\right) + 2$

$=$ ……

$= v_p(a-b) + t$

$= v_p(a-b) + v_p(n)$

よって, LTE の補題(1)が示された. (LTE の補題(1)の証明終)

(2) 次に, $p = 2$のときの LTE の補題を証明する.

(i)の証明

nが奇数のとき,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$は奇数であるため, (i)は成り立つ.

((i)の証明終)

(ii)の証明

補題 3.3

正の奇数a, bと正の偶数nについて,

$a-b$が 4 で割り切れるようなとき以下の式が成り立つ.

$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a-b) + v_2(n)$$

補題 3.3 の証明

nが偶数のとき, nは正の奇数kと正の整数mを用いて以下のように表せる.

$$n = k2^m$$

このとき, 補題 3.1 より, 以下のことがいえる.

$$v_2\left(a^{k2^m} - b^{k2^m}\right) = v_2\left(a^{2^m} - b^{2^m}\right)$$

また, $a^{2^m} - b^{2^m}$は以下のように因数分解できる.

$$a^{2^m} - b^{2^m} = \left(a^{2^{m-1}} + b^{2^{m-1}}\right)\left(a^{2^{m-2}} + b^{2^{m-2}}\right)\cdots(a+b)(a-b) \qquad \cdots(*)$$

ここで, 右辺に現れる $a^{2^l} + b^{2^l}$ $(0 \leq l \leq m-1)$について以下のことがいえる.

$$a^{2^l} + b^{2^l} \equiv 2 \ (mod\ 4)$$

なぜなら, a, bは奇数だから法を 4 として$a \equiv 1$ または-1, $b \equiv 1$ または-1であるため,

$l > 0$ のとき, $a^{2^l} + b^{2^l} \equiv 2 \ (mod\ 4)$.

$l = 0$ のとき, 左辺は$a+b$であるが, $a-b$が 4 で割り切れるという仮定から,

$$a + b \equiv (a-b) + 2b \equiv 2b \ (mod\ 4)$$

となり, bは奇数だから非負整数αを用いて$2\alpha + 1$と表すと

$$2b \equiv 2(2\alpha + 1) \equiv 2 \ (mod\ 4)$$

よって、$(*)$より、$a^n - b^n$が 2 で割り切れる回数は$v_2(a-b) + v_2(n)$回. (補題 3.3 の証明終)

ここで正の奇数xについて, $x^2 \equiv 1 (mod 4)$が成り立つ. よって, 正の奇数a, bと正の整数nについて, $a^2 - b^2$は4で割り切れることから補題3.3より以下のことがいえる.

$v_2(a^n - b^n)$

$= v_2\{(a^2)^{\frac{n}{2}} - (b^2)^{\frac{n}{2}}\}$

$= v_2(a^2 - b^2) + v_2\left(\frac{n}{2}\right)$

$= v_2(a^2 - b^2) + v_2(n) - 1$　（$\frac{1}{2} = 2^{-1}$より）

よって(ii)は成り立つ.　((ii)の証明終)

3. 問題演習

最後に, LTEの補題を用いることで見通しが良くなる問題を載せる.

・問題3.1

正の整数nについて, $11^n - 2^n$が3で100回以上割り切れるためのnの必要十分条件を求めよ. (LTEの補題を用いる典型問題)

・問題3.2

以下の式が整数になるような素数の組(p, q)を全て求めよ. (自作問題)

$$\frac{5^{pq} - 1}{p \cdot 2^q}$$

・問題3.3

$N = 2022^{2023^{2024}} + 2024^{2023^{2022}}$が2023で割り切れる回数の最大値を求めよ. ただし, 正の整数a, b, cについて, a^{b^c}は$a^{(b^c)}$を表しているものとする.

(IMO Shortlist 1991の類題)

解答

・問題3.1　$n = k \cdot 3^{998}$（kは自然数）

・問題3.2　$(p, q) = (2,2), (3,2)$

・問題3.3　2023回

4. 参考文献

・数オリの整数論（難問）に対するテクニック｜高校数学の美しい物語, 学びTimes, https://manabitimes.jp/math/945 , (参照 2023 - 9 - 9)

・Aditya Khurmi , Modern Olympiad Number Theorem, 2020, p.163-168.

第6章

部分分数分解が早くなりたい！！

OB　＊＊＊＊＊＊

自分は早実を 2021 年に卒業した数研の OB です。高 2 のときに数研の部長をやっていました。浪人して東大に入学して今は大学 2 年。秋からは東大の理学部情報科学科に進学することになりました。

夏休みに数研の合宿に参加しました。大学に入ってからは高校生の時ほど数学をやっていなくて、サークルでロボットの開発をするなどしていたのですが、久々に数学の話がしたいと思ってこれを書いています。

数学の面白さを中高生向けに伝えることができそうな話を考えてみました。そこで今回はみんな大好きな部分分数分解について話してみます。声に出して読むと楽しい数学用語ランキング一位です。部分分数分解、ぶぶんぶんすうぶんかい、ぶんぶん～

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

という等式は非常に有名ですね。一言で言ってしまえば有理式(分母も分子も多項式で表される式)をより簡単な有理式と多項式の和として表すのが部分分数分解です。他にも例をあげると

$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1})$$

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1}$$

のようなものがあります。一般に

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{m_k}\frac{a_{k,m}}{(x-\alpha_k)^m}$$

となるような複素数

$$a_{k,m}(1 \le k \le n, 1 \le m \le m_k)$$

が存在していることが知られます。(ただし$P(x)$ は $\sum_{k=1}^{n} m_k$次未満の多項式で $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は相異なる複素数。)

多項式 $f_1(x), f_2(x)$が共通因数を持たない(つまり $f_1(x) = f_2(x) = 0$ を満たす複素数 x が存在しない)とき、多項式 $g_1(x), g_2(x)$ が存在して $f_2(x)g_1(x) - f_1(x)g_2(x) = 1$

が(恒等的に)成り立ちます。また

$$deg\left(g_1(x)\right) < deg\left(f_1(x)\right),\quad deg\left(g_2(x)\right) < deg\left(f_2(x)\right)$$

とすれば $g_1(x)$、$g_2(x)$ は一意的に定まります。(ただし、degは多項式の次数です。この証明は今回は省略しますが、a, b を互いに素な整数として、$ax+by=1$ の整数解 (x,y) を見つけるためにユークリッドの互除法を使ったのと同様にして示せます。)したがって

$$\frac{1}{f_1(x)f_2(x)} = \frac{g_1(x)}{f_1(x)} - \frac{g_2(x)}{f_2(x)}$$

という部分分数分解を作ることができます。同じようにして $f_k(x) = (x-\alpha_k)^{m_k}$ とすると、$f_1(x),\dots,f_n(x)$ はどの 2 つをとっても共通因数を持たないので、$g_1(x),\dots,g_n(x)$が存在して

$$\frac{1}{f_1(x)\dots f_n(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{g_k(x)}{f_k(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{g_k(x)}{(x-\alpha_k)^{m_k}}$$

となります。つまり

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(x)g_k(x)}{(x-\alpha_k)^{m_k}}$$

となり、あとは $P(x)g_k(x)$ を$(x-\alpha_k)$で割ったあまりを $a_{k,m}$ とし、その際の商を更に $(x-\alpha_k)$ で割ったあまりをa_{k,m_k-1} として、これを繰り返すことで $a_{k,m}(1 \le k \le n, 1 \le m \le m_k)$が決定されます。

しかし、毎回この方法を使って少しずつ分解していくのはかなり面倒です。部分分数分解ができることがわかったので今度はより高速で楽に $a_{k,m}$を決定する方法を考えてみましょう。
まずは例題として

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$$

の a, b,c を決定することを考えます。

方法① 通分する最も愚直な方法です。上の式の両辺 $x^2(x+1)$ をかけてみると

$2x+1 = ax(x+1)+b(x+1)+cx^2$ つまり、$2x+1=(a+c)x^2+(a+b)x+b$ となって、

$a+c=0, a+b=2, b=1$ すなわち、$a=1, b=1, c=-1$

とわかります。これは高校でよく習うものですが(少なくとも自分はこれを教わりました)、分母が複雑になるほど多項式の展開の作業が煩雑になります。

方法② 適当な値を代入する

部分分数分解が上の形でできることはすでに分かっていて未知数は 3 つなので適当な値を 3 つ代入してみれば a,b,c を決定できるでしょう。ただし分母が 0 となると困るのでそれを避ける必要はあります。とりあえず $x=1,2,-2$ を試してみましょうか。

$x=1$を代入すると $\frac{3}{2} = a+b+\frac{c}{2}$

$x=2$を代入すると $\frac{5}{12} = \frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}$

$x=-2$を代入すると　$\frac{3}{4}=-\frac{a}{2}+\frac{b}{4}-c$

この連立方程式を解くと

$$a=1, b=1, c=-1$$

とわかります。

どうでしょうか…？適当に値を代入することで簡単に係数を決定できるはずが、逆に面倒になっています。実はこの方法も高校で習ったことがありますが、「普通に解くよりも計算量が多くないか…？」と思いました。連立方程式を解くのはなかなかめんどくさいです。大学の試験でも 4 元連立方程式を解くような問題を出す教員がいますが、計算力を試されているような気になります。(3 元連立方程式を解くということは 3 次の行列の逆行列を求めれば良く、n 元であれば n次行列の逆行列を求めることになりますが、掃き出し法を用いた場合、オーダー表記を用いると計算量は $O(n^3)$ です。手計算にしてもコンピュータを使うにしても逆行列を求めるのはあまり高速な手法とはいえません。)

方法②'　① と② を組み合わせる

② は分母が 0 になる値を代入してはいけないのが残念な要因の一つでした。そこで① の

$$2x+1=ax(x+1)+b(x+1)+cx^2$$

にいくつかの値を代入してみます。$x=0$ を代入すると $b=1$ がわかり、$x=-1$ を代入すると $c=-1$ を得ます。これは瞬時にわかります。なぜなら $x=0$ を代入したときは b 以外の項が消えて、$x=-1$ を代入したときは c 以外の項が消えているからですね。ただ a については $x=0$ を代入しても $x=-1$ を代入しても a を含む項が消えてしまうのでこの方法で瞬時に求めることはできません。

ここでわかったことをまとめると

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x-\alpha_k}$$

と分母が簡単な場合については

$$a_k=\frac{P(\alpha_k)}{(\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k-\alpha_n)}$$

と求められます。(オーダー表記を使うと全体の計算量は $O(n^2)$ と表せます。) 一問だけ例題を考えてみましょう。

$$\frac{4x^2+3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+1}$$

の a, b, c を決定します。

$$a=\frac{-4}{-2}=2$$

$$b=\frac{16+6-4}{2\cdot 3}=3$$

$$c=\frac{4-3-4}{-1\cdot(-3)}=-1$$

よって

$$\frac{4x^2+3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

こんな感じですね。かなり楽になったと感じると思います。

方法③　微分してみる

先程の例題

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$$

に戻ります。両辺に x^2 をかけると

$$\frac{2x+1}{x+1} = ax + b + \frac{cx^2}{x+1}$$

で、これの両辺を微分すると

$$\frac{1}{(x+1)^2} = a + \frac{cx(x+2)}{(x+1)^2}$$

となり、ここに $x=0$ を代入すると、$a=1$ を得ます。

この方法のポイントは b や c の値を求めず直接 a の値だけを求めることができるということです。これをヒントにもう少し一般化させて考えてみたいですね。

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{m_k}\frac{a_{k,m}}{(x-\alpha_k)^m}$$

の両辺に $(x-\alpha_1)^{m_1}$ をかけると

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}}$$

$$= a_{1,m_1} + a_{1,m_1-1}(x-\alpha_1) + \cdots + a_{1,1}(x-\alpha_1)^{m_1-1} + (x-\alpha_1)^{m_1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{m=1}^{m_k}\frac{a_{k,m}}{(x-\alpha_k)^m}$$

となります。

$$a_{1,m}(1 \le m \le m_1)$$

を求めるためにまずは両辺を x で (m_1-m) 回微分してみましょう。すると右辺の最初の (m_1-m) 個の項、つまり a_{1,m_1} から $a_{1,m+1}(x-\alpha_1)^{m_1-m-1}$ が消えます。これで得られた式に $x=\alpha_1$ を代入すると右辺は

$$(m_1-m)!\,a_{1,m}$$

となりますね。

(もう少しだけ詳しい説明：

$a_{1,m-1}(x-a_1)^{m_1-m+1} + \cdots + a_{1,1}(x-\alpha_1)^{m_1-1}$ は x で (m_1-m) 回微分して $x=\alpha_1$ を代入すると 0 になることが明らかで、

$$(x-\alpha_1)^{m_1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{m=1}^{m_k}\frac{a_{k,m}}{(x-\alpha_k)^m}$$

については積の微分のライプニッツの公式$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)} g^{(n-k)}$を思い出すとこれも x で (m_1-m) 回微分して $x = \alpha_1$ を代入すると 0 になることが分かります)

つまり

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}}$$

を x で (m_1-m) 回微分して $x=\alpha_1$ を代入した値を $(m_1-m)!$ で割ったものが $a_{1,m}$ です。そして $a_{k,m}(1\le m\le m_k)$ についても全く同じようにして求めることができます。

方法④ テイラー展開を使う

これで他の係数を求めることなく直接 $a_{k,m}$ $(1\le k\le n, 1\le m\le m_k)$ を求めることができました。しかし分数関数の微分の公式は計算が面倒です。数Ⅲを習ったことのある人で、あまりの大変さにうんざりしてしまったという人も少なくないでしょう。そこで次は面倒な微分の計算を回避する方法を考えてみます。

先程の式の右辺

$$a_{1,m_1}+a_{1,m_1-1}(x-\alpha_1)+\cdots+a_{1,1}(x-\alpha_1)^{m_1-1}+(x-\alpha_1)^{m_1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{m=1}^{m_k}\frac{a_{k,m}}{(x-\alpha_k)^m}$$

をよく見ると $x=\alpha_1$ でのテイラー展開の形に似ていることに気づきます。

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{m=1}^{m_k}\frac{a_{k,m}}{(x-\alpha_k)^m}$$

は $(x-\alpha_1)$ でテイラー展開できてそれを $b_0+b_1(x-\alpha_1)+b_2(x-\alpha_1)^2+b_3(x-\alpha_1)^3+\cdots$ とおけば

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}}$$

$$=a_{1,m_1}+a_{1,m_1-1}(x-\alpha_1)+\cdots+a_{1,1}(x-\alpha_1)^{m_1-1}$$

$$+b_0(x-\alpha_1)^{m_1}+b_1(x-\alpha_1)^{m_1+1}b_2(x-\alpha_1)^{m_1+2}b_3(x-\alpha_1)^{m_1+3}+\cdots$$

と表せます。従って

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}}$$

を $x=\alpha_1$ で (m_1-1) 次までのテイラー展開をすれば $a_{1,1}$ から a_{1,m_1} が求められるということです。

そして有理式の場合、有限次までのテイラー展開は微分を計算する必要がありません。例えば

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x+1}$$

の a,b を決定する場合には

$$\frac{2x+1}{x+1}$$

の 1 次までのマクローリン展開を計算すればよいです。

$$\frac{2x+1}{x+1} = (1+2x)(1-x+x^2-x^3+\cdots) = 1+x-x^2+x^3-x^4+\cdots$$

ということから 1 次までのマクローリン展開では $1+x$ となる。よって $a = 1, b = 1$ とわかります。c を決定するときには

$$\frac{2x+1}{x^2}$$

に $x=-1$ を代入するだけであり $c=-1$ を得ます。

では、次にもう少し複雑な例です。

$$\frac{1}{x^4(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2} + \frac{g}{x+2}$$

の a, b, c, d, e, f, g を求めてみましょう。学校の定期試験とかではなかなか出てこないくらい見た目が激しい問題ですね。まずで $\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$ の $x=0$ の 3 次までのテイラー展開を計算します。

このときに $|x|$ が十分小さいと考えて近似式のような形で書くと楽です。

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2(1+x/2)}$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}(1+2x+3x^2+4x^3)(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8})$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}+\frac{3x}{4}+\frac{9x^2}{8}+\frac{23x^3}{16}$$

次に

$$\frac{1}{x^4(x+2)}$$

の $x=1$ におけるテイラー展開を 1 次の項まで計算してみます。今度は $|x-1|$ が十分小さいと考えて近似式の形でかくと

$$\frac{1}{x^4(x+2)} = \frac{1}{(1+(x-1))^4(3+(x-1))}$$

$$\fallingdotseq (1-4(x-1))(\frac{1}{3}-\frac{x-1}{9}) \fallingdotseq \frac{1}{3}-\frac{13(x-1)}{9}$$

最後に、

$$\frac{1}{x^4(x-1)^2}$$

の $x=-2$ におけるテイラー展開を 0 次の項まで求めれば良いのですが、これは単に $x=-2$ を代入するだけで$\frac{1}{144}$と分かりますね。

以上より

$$a=\frac{23}{16}, b=\frac{9}{8}, c=\frac{3}{4}, d=\frac{1}{2}, e=-\frac{13}{9}, f=\frac{1}{3}, g=\frac{1}{144}$$

と分かりました。つまり

$$\frac{1}{x^4(x-1)^2(x+2)}=\frac{23}{16x}+\frac{9}{8x^2}+\frac{3}{4x^3}+\frac{1}{2x^4}-\frac{13}{9(x-1)}+\frac{1}{3(x-1)^2}+\frac{1}{144(x+2)}$$

ということです。これもなかなかに大変な計算だったかもしれませんが、方法①や方法②といった手法ではもっと計算の量が多くて大変でしょう。

ちなみにテイラー展開は、理系ならほとんどの人が大学一年生のときに学ぶことになると思います。今回は高校生向けにテイラー展開を知らなくても、$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$という数Ⅲの公式だけでだいたい理解できるように書いたつもりです。もっと詳しく知りたい人はぜひ大学一年生向けの解析学の教科書などを読むと良いと思います。

(おまけ)

最後にもう一歩だけ踏み込んだ話をしてみます。

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}}$$
$$=a_{1,m_1}+a_{1,m_1-1}(x-\alpha_1)+\cdots+a_{1,1}(x-\alpha_1)^{m_1-1}$$
$$+b_0(x-\alpha_1)^{m_1}+b_1(x-\alpha_1)^{m_1+1}+b_2(x-\alpha_1)^{m_1+2}+\ldots$$

の両辺を $(x-\alpha_1)^{m_1}$ で割ると

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}}$$
$$=\frac{a_{1,m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{a_{1,m_1-1}}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}}+\cdots+\frac{a_{1,1}}{x-\alpha_1}$$

$$+b_0+b_1(x-\alpha_1)+b_2(x-\alpha_1)^2+\cdots$$

という形になりますが、これは $(x-\alpha_1)$についての負冪を含んだ冪級数と言えます。

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}}$$

は $x=\alpha_1$ で m_1 位の極となっていて $x=\alpha_1$ に十分近い領域でのローラン展開の主要部が

$$\frac{a_{1,m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{a_{1,m_1-1}}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}}+\cdots+\frac{a_{1,1}}{x-\alpha_1}$$

です。同様に $x = \alpha_k$ に十分近い領域でのローラン展開の主要部が

$$\sum_{m=1}^{m_k} \frac{a_{k,m}}{(x-\alpha_k)^m}$$

と表せます。ここで元の部分分数分解が

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_n)^{m_n}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{m_k} \frac{a_{k,m}}{(x-\alpha_k)^m}$$

であったことを思い出してみましょう。右辺は各特異点においてその特異点に十分近い領域でのローラン展開の主要部を全て足し合わせたものになっていることがわかります。

十分近いといった表現を書いているのは複数の特異点を持つ場合ローラン展開はどの領域での展開であるかを明記する必要があるためです。例えば

$$\frac{1}{x(x+1)}$$

を $x = 0$ でローラン展開するときは

$$\{x \mid 0 < |x| < 1\} \quad と \quad \{x \mid |x| > 1\}$$

の 2 つの領域が考えられてどちらを選ぶかによって結果が異なります。今回は全て前者のような特異点に十分近い方の領域で展開しています。

最後に

いかがだったでしょうか？部分分数分解という身近で中学受験でも扱われるようなテーマからあっという間に大学数学にもつながる話になりました。今回は解析学の方向に向かっていきましたが、最初に部分分数分解ができることの説明で、ユークリッドの互除法を使うと書きましたように、部分分数分解の話から代数学の話へつなげることもできます。身近な問題からあっという間に専門的な話題につながる、しかもそれが一つの分野だけではなく複数の分野に跨がるというのは数学の一つの面白さだと思っています。

数学は非常に長い歴史を持つ学問です。考えてみてください。人類は太陽が地球の周りを回っていると考えていた時代もあれば、重いものほど速く落ちると考えていた時代も、錬金術によって金が作り出せると思っていた時代もありました。もちろん当時の研究が完全に無駄だったとはいえないでしょうけれど、重いものほど早く落ちることを前提とした研究が現在の物理学に直接活かされることはないでしょう。しかし数学に関しては 2500 年前に発見されたピタゴラスの定理が現在でも非常に重要な役割を果たしています。さらに数学はメジャーな学問であるため、研究内容も非常に多岐にわたっています。長い歴史を持ち多数の分野が複雑に絡み合っている、そう考えるとなんだか迷宮のようです。近寄りがたく感じるかもしれません。それでも、数学の迷宮への入り口は意外と身近なところにあります。本屋や図書館へ行き数学書のコーナーを見ると「〇〇入門」などと書かれた本なのに内容が難しそうで気後れしてしまうかもしれません。しかし身近な定理や問題など

から興味のある事柄を見つけて掘り下げるようにすると勉強しやすくなるかと思います。

OB があんまり長い記事を書いてもしょうがないから短くしようと思っていたのですが、思いの外長くなってしまいました。最後までお読みいただきありがとうございました。またどこかでお会いしましょう。

第7章

すうけんアンケート 2023

高等部 3 年　＊＊＊＊＊＊

はじめに

　こんにちは。この企画は、すうけん部員に対して行ったアンケートの結果を紹介することで、すうけん・すうけん部員、ひいては早実という学校を知ってもらおうというコンセプトで行いました。

　~~まあ『わらしべ』の方針転換への不満が爆発したというのが本音ですが。~~

注:『わらしべ』

　…本校の生徒会誌。5,6 年前までは、だいたい学年企画としてアンケートが行われ、その中でも優れた珍回答・面白回答にツッコミを編集が入れていた。基本的に期限間近に編集が行われるグダグダかつカオスな企画たちだが、ある程度タブーなしに本音を書けるためか、各学年の天才たちのお蔭か、各学年の色が見え、お役立ち情報も載っているなど、その割に秀逸だった。これが早実生の底力なのだろう。

　しかし、2022 年度(第 62 号)に「コンセプトブック」という発想のもとでの転換を図って大変「キレイ」になり、次年度以降も「コンセプトブックとしての役割」を担っていくとのことなので、もう元には戻らないだろう。「キレイ」な『わらしべ』は本校 HP からご覧になれます。

　ということで、昔の『わらしべ』風にお送りします。ごゆるりと。

※　以降、M・S(架空の早実生)が登場します。

Q1. あなたは何者ですか？

M「素直に本名を書いてくれた子が何人か」
S「個人情報的にカットで」

・哺乳類サル目ヒト科ヒト亜科ヒト族ヒト亜族ヒト族ヒト属ヒト
M「頭よさそう」
S「頭悪そうな感想ありがとう」

・吾輩は猫である。名前はまだ無い。
M「あらすじ知らないけど冒頭だけ知ってる」
S「たぶんそれが圧倒的多数派」

・ヒン・ジャックマン
S「惜しい」
M「弱そうなイケメンだな」

・ずっとコサインでいいのに。
S「元ネタはわかったけど、コサインのチョイスが謎」
M「謎が多い方が人間として面白いから、まあよし」

・幽霊
M「とか言ってたら、もはや人間でもない方が」
S「昔のアンケートで超大陸パンゲアって回答があったのを思い出させる」

・文系
M「文系だろうと大事なメンバーです」
S「あいつはいいやつだ」

Q2. 「すうけん」ときいて真っ先に連想するものは？

・「区聞陬見(すうけん)」学問や見識がきわめて狭く、かたよっていること。
S「なるほど、また一つ賢くなったわ」
M「『しゅけん？』って言ってたやつが偉そうに言うな」

・自由！
S「結構この印象強いよな」
M「今のご時世、緩くなきゃやってけませんよ」

・実用数学技能検定
M「結構いた」
S「世間的にはこっちかも」

・数研出版
M・S「お世話になってます！」
S「数学の教科書と言えばこれ」
M「あくまでうちの学校に限るがね」

・ナブラ演算子ゲーム
M「数学ゲームの鉄板」
S「ルールとかは HP から見られる過去の部誌に載っているのでそちらで(露骨な宣伝)」

Q3. あなたにとって、「数学」とは？

・呼吸
S「強者が現れました」
M「お手合わせ願おう」

・正義
S「反証ができないですからね」
M「過激なようで、本質をとらえた回答」

・シマウマにとってのライオンみたいな感じですね。
S「たとえのクセ」
M「人生何周かしてんのか？」

・人生（言ってみたいだけ）
S・M「わかる」
M「かっこいいもんね、憧れる」

・難しいけど、理解できると楽しい学問！
S「たぶんベストアンサー」
M「いろんな人に当てはまると思うなあ」
S「ぜひとも嫌いにはならないでいただきたい」

Q4. 早実の数学教育に物申してください。

M「不満ある前提なんだ」
S「いくらあの先生方でも生徒を 100%満足させるのは無理と予想」
M「なるほど？」
S「人間なんてそんなもんよ」

・申すことは、ございません。
M「で、いきなりこれ？」
S「…」
M「君みたいなひねくれ者は、そう多くないんですよ」

・授業全部数学にするべきだと思う。とりあえず早く英語は消滅してほしい。
M「お怒りのコメントが１件」
S「なんで英語って嫌われるんでしょうね」
M「まあこれをやったら数学嫌いも増えるんでしょうけどね」
S「話がかみ合ってませんね」

・日付で解答者決めるのなんなんですかねー
S「これは数学に限らないね」
M「32 番以降との格差よ」
S「31 番より前の人が、荒ぶる気持ちはわかる」
M「政府は一刻も早く 1 か月を 45 日にする法案を提出するべき」

・すみません、無神論者なので。
M「意味不明過ぎて採用」
S「なんなんだ」
M「ほんとなんなんだ」

Q5. 学校生活の中で、一番怖かったことを教えてください。

・文実に絶対に出さなければいけない書類。 提出 2 日前、完全白紙。次の登校日は提出当日。
部長「顧問印は当日に貰おう！」 副部長「え、その日先生は学校来ないけど…？」
――『ミッション:インポッシブル　いなほ編』開催
M「背筋が凍った」
S「補足すると文実は文化祭実行委員会のこと。結構書類系は大変よね、クラスでも部活でも」
M「毎年文実が文句言われてる気がする」
S「上に立つ者の定めなのかね、関係ないけど映画のクルーズほんとカッコよかった」
M「トムな」
S「」

・落としたコンパスの針が床に刺さって直立した瞬間
S「すごいことが起きてますね」
M「運良すぎるとき、もう死ぬんじゃないかと思うわ」
S「九蓮宝燈とかそんな感じ」
M「分からない人は Google 先生に聞きましょう」

・冬に廊下でカイロを投げて遊ぶ人がいること。投げたカイロが先生に当たったこともあるという。
M「中学生はわんぱくだから」
S「こんなのかわいいもんよ」
M「先生もきっと許してくれるさ」
S「その後どうなったんだろ」
M「何も書いていないということは…」

・自習をしていたら、教室のドアに生徒が激突し、窓が割れてたこと
M「突っ込みどころしかないですね」
S「自習ってなんだっけ」
M「うちの校舎意外ともろいから、ない話じゃないね」
S「築 20 年だから」
M「いずれにしても弁償でしょ」
S「高校生でも割るくらいだから、強く生きてください」

・自分と金銭感覚が桁違いに違うほどの大金持ちが沢山いたこと。
M・S「わかるわ～」
S「使い方が贅沢だよね」
M「でも合宿とかで多少治るから」
S「住めば都」
M「使い方ちゃうで」

・ブラックな部活の一週間の予定を聞いたこと
M「おお怖や」
S「文化祭前の文化部とか、運動部の大会前はみんなブラック」
M「必要悪」

Q6. ぜひとも聞いてほしい数研部員の武勇伝があれば教えてください。

・数学のテストで赤点取ってた
M「すうけん部員といえど、そういうときもある」
S「物理赤点の人もいたっけ」
M「まあ人生そんなもん」
S「強引にまとめるな」

・そういえば数研は運動部だ！　って言って部活中に筋トレしたり、ペットボトルキャップ後輩に当てたら腕立て伏せ 10 回ルールとかってありましたね。今もそれってあるんですか？
S「あるね」
M「実は結構運動してるんだなあ、これが」
S「遊びじゃなくね、ペットボトルキャップ投げはうちの伝統」
M「伝統って言っときゃなんとかなると思ってない？」

・去年の先輩が三平方の定理を 102(？)通り訳した事が自慢です。
M「みんなの協力プレーね」
S「だいぶ多くやってくれてた子もいてありがたかった」
M「僕の予知によれば今年の文化祭の展示で見られますよ」
S「当たってるといいけど」
M「外れてたらここカットすればいいから」
S「もう無茶苦茶」

Q7. 今、あなたがオススメしたいものを、30 文字以内で語ってください。

M「いわゆる“推し”みたいなやつ」
S「正直全く答えが読めない」

M「一人だけ読めそうなのがいた気が…」

・哲学哲学哲学哲学哲学哲学数学数学数学数学数学数学数学哲学哲学
・呪術廻戦呪術廻戦呪術廻戦呪術廻戦呪術廻戦呪術廻戦呪術廻戦
M「出ましたループ系」
S「正直これが欲しかったところはある」
M「原点回帰した CM みたい」

・今はないのでこれから見つけていきます。
M「それでいいよ、人生 100 年」
S「まあ『夢は何ですか？』って聞かれても答えられる人少ないしね」
M「『あなたの個性ってなんですか？』とかも」
S「『個性』って、人の頭でわかるような単純なものですかね？」
M「ひねくれすぎ」

・広辞苑では、「問題を出して、相手に答えさせる遊び」と記され/
M「やばいわからない」
S「クイズ」
M「あ゛」
S「顔真っ赤じゃん」
M「いやー、この回答そのものがクイズみたいで素晴らしい」
S「負け惜しみを…」

・ずっと真夜中でいいのに。を聴きましょう
S「載せないと悲しまれそうなので、ちゃんと載せました」
M「音楽は必要。音楽って、人生のスパイスですから。」
S「カッコつけるな、しかも表現がダサい」

Q8. 部誌を読んでくれている方へ一言

・物理学者リチャード・P・ファインマンの言葉です。『知識が増えれば、もっと深く不思議な謎が姿を現し、ますますのめり込む。 期待はずれの答えかもしれないなどと心配するな。楽しむ心と自信を持って新しい石を一つずつひっくり返していけば、 そのたび想像もしなかったような奇妙なものが見つかり、もっと素晴らしい疑問が出てくる。間違いなく壮大な冒険だ。』
M「ええこと言うやん」
S「我々とは格が違う」

・数学は爆発だ！
M「元ネタどれくらいの人が知っているんだろ」
S「親世代は知ってると思うから心配するな」

M「わからない人は恥ずかしがらず聞きましょうね」

・僕と契約して数研部員になってよ
S「字面だけ見るとむしろイメージダウンする気しかしない」
M「面と向かって言われても逃げられそう」
S「契約の必要ないんで」
M「良かったら入ってください」

・すうけんはスポーツ部寄りの文化部です。すうけんブースとその隣のクイズ研ブースをぜひ楽しんでください。
M「オススメしたいものに『筋トレ』が出る部ですからね」
S「合宿は歩いてなんぼ」
M「老体には厳しかったわ…」

・入試予想もぜひ解いてみてください。
S「もう始まって5年か」
M「今年は誤植を0にできるのか…？」

・面白かったら、友達にも勧めてみてください！
・読んでくれてありがとうございます
M「この2つに尽きる」
S「楽しんでもらえればね」

おわりに(※真面目な文を書ける状態じゃないのでMとSが続投)
S「あっという間におしまいの時間です」
M「ちょっと笑うなり、参考になってるといいな」
S「まあ高望みできるクオリティに仕上げるほどの能力はなかった」
M「提出期限まであと1日の時点でねえ」
S「みんなこんな雑なアンケートよく答えてくれたよな」
M「そりゃ圧力かk」
S「っはい、部員のみんなありがとう」
M「選んだ回答に偏りがあったかもしれないが」
S「深夜に作業してるからお許しを、そこまで配慮はできない」
M「そして、読んでくれたあなたもありがとう」
S「構成のガタつきとか、後半急にセリフ増えたりとか、ツッコミどころはいろいろありますけど」
M「生暖かい目で見てくれれば」
S「予め断っておけばよかったね」
M「後の祭りよ」
S「…どう終わればいいんだ？」

M「そんなの知らない、こういうときは勢いでなんとかなるから」
S「そういわれても…」
M「3・2・1」
S「それでは、またどこかで！」
M「また、いつか！」
M・S「さようなら～！！」

《第 3 章　問題の答え》

第 3 章で出題した問題の解答です。まだ解いていないという方は，p. 17 から始まる第 3 章を読んだうえで解いてみてください。

[1]	10	[111]	1	[1101]	1110
[10]	101	[1000]	110	[1110]	101
[11]	111110	[1001]	-10001111	[1111]	-101
[100]	0	[1010]	1	[10000]	$1111-1100\sqrt{101}$
[101]	111	[1011]	11	[10001]	11001000
[110]	-1001	[1100]	11	[10010]	$x=1\pm\sqrt{10}$

おわりに

会誌第 8 号を読んでいただき，ありがとうございました。今年の文化祭は予約制ではありましたが，4 年ぶりに通常開催をすることができ，この部誌を皆様に直接お渡しすることができました。

数学は，身近なところで役に立っており，論理的な思考力がつくなど，教科としても良い点があります。しかし，数学について魅力を感じたり興味を持ったりすることができず，数学を避けてしまうという人も多いのではないでしょうか。数研では，これからも皆様が数学に興味を持ってもらえるよう，数学の面白さや楽しさ，そして奥深さを感じられるような活動をしていきます。

数研　部誌編集者より

すうけん